Força de atrito

No mundo real, todo movimento mecânico é acompanhado de dissipação. Isso ocorre pois os sistemas sempre estão em contato com o ambiente ao seu redor. Nós podemos reduzir bastante esse contato em alguns casos. Mas sempre sobra alguma coisa. Por exemplo, podemos estudar a queda livre de uma partícula dentro de uma câmara de vácuo, para diminuir o atrito com o ar. Mas o vácuo nunca é perfeito e, portanto, algum atrito sempre acaba sobrando.

Estudaremos aqui dois tipos de forças de atrito: o atrito com o ar e o atrito entre duas superfícies em contato.

Atrito com o ar

Considere um objeto em queda livre. As colisões desse objeto com os átomos do ar ao seu redor produzirão uma força que tende a frear o objeto. Essa força é, portanto, contrária à direção do movimento.

Não existe uma teoria fundamental que nos permita derivar uma expressão para a força de atrito. É necessário, portanto, se basear no experimento.

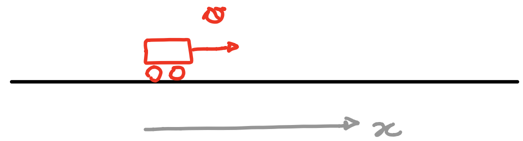
Experimentalmente, observa-se que para velocidades baixas a força de atrito tende a ser linear na velocidade. Ou seja

$$F_a = -\lambda v \qquad (1)$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante que depende de uma série de fatores, como a forma do objeto e a temperatura. O sinal de menos na Eq. (1) é fundamental. Ele diz que a força sempre se opõe ao movimento. Ou seja, ela sempre tende a frear a partícula. Quando a velocidade é muito alta, a Eq. (1) deixa de ser válida. O que se observa experimentalmente é que nesse caso a força passa a depender de potências maiores da velocidade, como por exemplo v^2. Ou seja, para velocidades muito altas o efeito do atrito é ainda mais forte.

Considere uma partícula se movendo sobre um trilho de atrito desprezível, sujeita apenas à força (1). A 2ª lei será, portanto

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_a = -\lambda \vec{v} \qquad (2)$$



O movimento será apenas em 1D. Portanto, podemos escrever $\vec{v} = v\hat{i}$ e olhar apenas para a componente x da Eq. (2)

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda v \qquad (3)$$

É importante que você entenda bem a diferença entre (2) e (3): a Eq. (2) é geral pois não faz referência a um sistema de coordenadas. Já a (3) assume explicitamente o referencial da figura.

A Eq. (3) é um exemplo de uma equação diferencial. Ou seja, é uma Eq. que mistura a função $v(t)$ com a sua derivada dv/dt. Defina

$$\alpha = \frac{\lambda}{m} \qquad [\alpha] = \frac{[\lambda]}{[m]} = \frac{[F]}{[m][v]} = \frac{1}{s} \qquad (4)$$

Com isso a (3) se torna

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v \qquad (5)$$

Temos agora que pensar, qual a função $v(t)$ que, quando eu derivo eu obtenho ela mesma (a menos de uma constante)? Por exemplo, uma potência de t não funciona, já que se $v(t) = t^n$ então $\dot{v} = n t^{n-1}$ (lembre, $\dot{v}$ e dv/dt são a mesma coisa). Ou seja, $\dot{v}$ não será proporcional a v a menos de uma constante.

A resposta para essa pergunta é a função exponencial. A exponencial e^t tem uma propriedade muito especial, que vocês verão no curso de cálculo, que a sua derivada é ela mesma

$$\frac{d}{dt}(e^t) = e^t \qquad (6)$$

Isso é muito diferente de potências, como t^2. Com t^2 só conseguimos derivar duas vezes. Depois dá zero. Com e^t podemos derivar infinitas vezes que sempre obtemos o mesmo resultado.

Considere agora a função $e^{-\alpha t}$. Para derivar com relação a t, usamos a regra da cadeia que havíamos discutido algumas aulas atrás:

$$\frac{dt}{dt} f(g(t)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} \qquad (7)$$

Nesse caso $f(g) = e^g$ e $g(t) = -\alpha t$. Portanto

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}) = \underbrace{\frac{d}{dg}(e^g)}_{e^g} \underbrace{\frac{d}{dt}(-\alpha t)}_{-\alpha} = -\alpha e^g$$

Substituindo $g = -\alpha t$, obtemos então que

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}) = -\alpha e^{-\alpha t} \qquad (8)$$

Compare isso agora com a 2ª lei (5): $\frac{dv}{dt} = -\alpha v$. A cara é exatamente a mesma: d/dt da função é $(-\alpha)$ vezes a própria função. Portanto

$$v(t) = e^{-\alpha t}$$

é uma solução de (8). Mas isso está meio estranho: $e^{-\alpha t}$ é adimensional. Eu preciso de algo que tenha dimensão de velocidade! Além disso, se colocamos $t = 0$, como $e^0 = 1$, obtemos $v(0) = 1$. Mas em nenhum momento eu disse que a velocidade inicial era 1. Eu quero uma resposta em termos de uma velocidade inicial arbitrária v_0.

O que aconteceu, na verdade, é que $e^{-\alpha t}$ é solução de (5). Mas na verdade qualquer função do tipo

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} \qquad (9)$$

também será. Para ver que isso é verdade, basta calcular a derivada. Como v_0 é constante

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}\right) = -\alpha \underbrace{v_0\, e^{-\alpha t}}_{v} = -\alpha v \qquad (10)$$

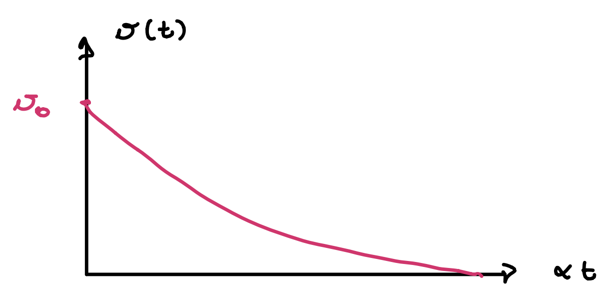
Ou seja, (9) resolve (5). O valor de v_0 pode agora ser ajustado para ser a condição inicial: $v(0) = v_0$.

Resumindo:

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v \quad \rightsquigarrow \quad v(t) = v_0\, e^{-\alpha t} \qquad (11)$$

A abordagem que eu usei aqui não foi muito rigorosa. Mas não se preocupe. Você vai estudar equações diferenciais desse tipo em muito detalhe nos próximos semestres. Eu queria introduzir essa solução aqui pois ela é muito importante e aparece com frequência em várias áreas da física.

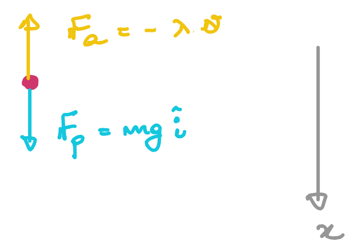
O gráfico da função exponencial tem a seguinte cara



Ela começa em v_0 e decai muito rapidamente, tendendo a zero para tempos longos.

Queda livre e velocidade terminal

Considere agora uma partícula em queda livre, sob o efeito da força da gravidade e do atrito com o ar. Escolhemos um referencial apontando para baixo:



A 2ª lei será, portanto,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_a = mg\,\hat{i} - \lambda \vec{v} \qquad (12)$$

O movimento será meramente em 1D, portanto podemos focar apenas na componente x:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v \qquad (13)$$

Vamos agora imaginar o que acontece: a partícula é solta e começa a acelerar devido a g. Mas quanto mais ela acelera, mais o atrito se torna importante (pois v vai aumentando). Com isso deve chegar um ponto onde os dois efeitos se compensam e a aceleração se anula.

Vamos ver se isso é possível. Ou seja, em qual situação podemos ter uma aceleração nula? Impondo $dv/dt = 0$ na Eq. (13) obtemos

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v = 0 \tag{14}$$

Isso define, portanto, a velocidade terminal

$$v_{term} = \frac{g}{\alpha} \tag{15}$$

Essa é a velocidade que o corpo atinge quando, passado um certo tempo, a força gravitacional se compensa com a força de atrito para dar uma força resultante nula.

É isso que acontece, por exemplo, com o paraquedista. Depois do salto ele começa a acelerar. Mas passado algum tempo, ele estabiliza na velocidade terminal e passa a se mover em movimento <u>uniforme</u>.

Teste de sanidade: v_{term} aumenta com g (mais gravidade, mais rápido você vai) mas é inversamente proporcional a α (mais atrito, mais devagar você vai).

A solução completa da Eq. (13) é

$$v(t) = v_0 \, e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \qquad (16)$$

Eu não vou explicar como chegar nesse resultado. Isso vocês verão mais para frente. Mas podemos pelo menos checar que ele está certo; ou seja, que satisfaz a Eq. (13):

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}\right) + \frac{g}{\alpha}\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$= v_0\left[-\alpha e^{-\alpha t}\right] + \frac{g}{\alpha}\left[-(-\alpha) e^{-\alpha t}\right]$$

$$= -\alpha v_0 e^{-\alpha t} + g e^{-\alpha t} \qquad (17)$$

Precisamos comparar isso com o lado direito da Eq. (13):

$$g - \alpha v = g - \alpha\left\{ v_0 e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right\}$$

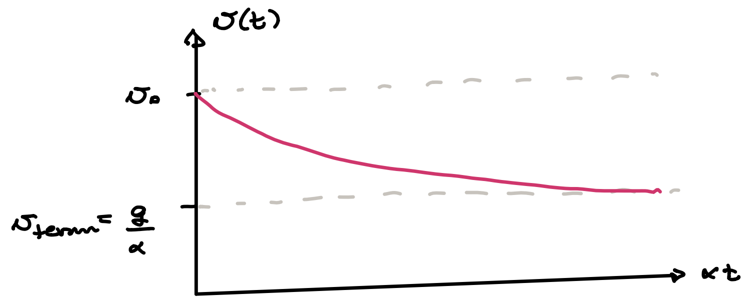
$$= g - \alpha v_0 e^{-\alpha t} - g + g e^{-\alpha t}$$

$$= -\alpha v_0 e^{-\alpha t} + g e^{-\alpha t} \qquad (18)$$

TA-DA! (17) e (18) são iguais e, portanto, a (16) é de fato solução.

Teste de sanidade: se $g = 0$ na Eq. (13) recuperamos a Eq. (11)

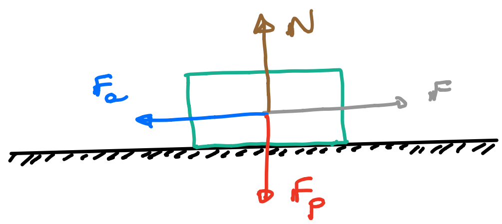
O gráfico da Eq. (16) tem a seguinte cara



A partícula começa em v_0 e termina em v_{term}, relaxando exponencialmente de um para o outro.

Atrito entre duas superfícies

Vamos agora estudar um outro tipo de força de atrito que aparece com frequência: o atrito entre duas superfícies. Considere, por exemplo, um bloco sobre uma superfície plana



Se tentamos empurrar o bloco para a direita com uma força F, haverá um atrito com a superfície que dificultará mover o bloco. A origem física deste atrito é complicada e está relacionada com as interações eletrostáticas entre os átomos das duas superfícies. Naturalmente, não existe teoria fundamental capaz de calcular essa força e temos que nos contentar com observações empíricas.

Para as dinâmicas básicas do nosso dia a dia como, por exemplo, empurrar o seu gato que decidiu sentar bem em cima do computador que você está usando para preparar aula, valem as seguintes observações:

(I) É necessário distinguir entre atrito estático (quando) o bloco está em repouso e atrito dinâmico (quando ele está em movimento).

(II) Quando o bloco está em repouso, a força de atrito será sempre oposta e de mesma magnitude que a força resultante sobre o bloco

$$F_a = -F \tag{19}$$

Isso será válido apenas até uma força máxima F_a^{max}. Se F for maior que F_a^{max}, o bloco começará a deslizar.

(III) A força máxima F_a^{max} é proporcional à força normal

$$F_a^{max} = \mu_e N \tag{20}$$

onde μ_e (adimensional) é chamado coeficiente de atrito estático. Ele depende de forma complicada nos detalhes do contato entre as duas superfícies. Ou seja, nos materiais envolvidos, rugosidade, humidade, temperatura, etc. Em geral μ_e varia mais ou menos entre 1 e 0.01.

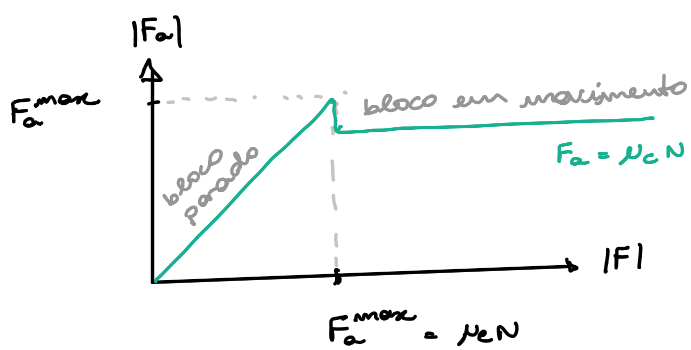
(IV) Se a força resultante ultrapassa F_a^{max}, o bloco passa a se mover. A força de atrito nesse caso será sempre contrária à direção do movimento. A magnitude de F_a também será proporcional à N nesse caso, mas com outro coeficiente de proporcionalidade

$$|F_a| = \mu_c N \qquad \text{para } F > F_a^{max} \tag{21}$$

onde μ_c é o coeficiente de atrito dinâmico, que é sempre menor que o estático

$$\mu_c < \mu_e. \tag{22}$$

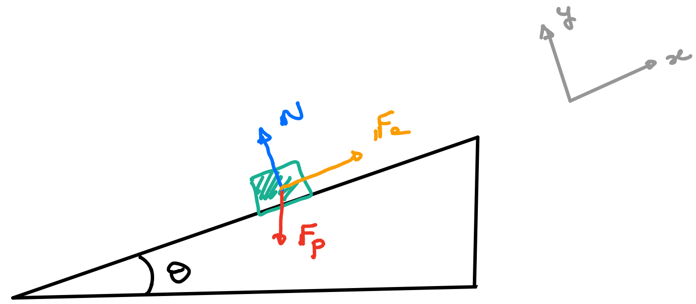
Um gráfico de $|F_a|$ em função de $|F|$ terá, portanto, a seguinte cara



Ou seja, conforme aumentamos F, o atrito no começo responde na mesma medida. Mas após F_a^{max} o bloco passa a se mover e F_a passa a ser constante, independente de F.

Exemplo: plano inclinado

Para entender melhor como funciona tudo isso, vamos usar como exemplo um bloco num plano inclinado



Como vimos na última aula, a normal deve compensar a a componente da força peso perpendicular à superfície. Portanto

$$N = mg\cos\theta \qquad (23)$$

A força resultante será, portanto, paralela à superfície (direção x) e dada por

$$\mathbf{F} = -mg\sin\theta\,\hat{i} \qquad (24)$$

Agora precisamos saber se o bloco vai escorregar ou não. Para saber isso, temos que comparar $|\mathbf{F}| = mg\sin\theta$ com $F_a^{max} = \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta$. O bloco vai se mover quando $|\mathbf{F}| > F_a^{max}$.

Calculando a razão entre as duas, obtemos

$$\frac{|F|}{F_a^{max}} = \frac{mg \sin\theta}{\mu_e mg \cos\theta} = \frac{\tan\theta}{\mu_e} > 1 \tag{25}$$

Obtemos, portanto, a condição

$$\tan\theta > \mu_e \tag{26}$$

Isso define um ângulo crítico θ_e definido por

$$\tan\theta_e = \mu_e \quad \text{ou} \quad \theta_e = \arctan(\mu_e) \tag{27}$$

Esse ângulo representa a inclinação a partir da qual o bloco deslizará. Se $\theta > \theta_e$ ele desliza e se $\theta < \theta_e$ ele fica parado.

Isso fornece uma forma extremamente simples de determinar μ_e. Note como μ_e não depende da massa do material, apenas do tipo de contato entre as duas superfícies.

Se $\theta > \theta_e$, o bloco quando solto, começará a deslizar. Nesse caso a $2^{\underline{a}}$ lei para a aceleração na direção x será

$$ma = \underbrace{-mg\sin\theta}_{\text{Eq. (24)}} + \mu_c N$$

Como $N = mg\cos\theta$, obtemos

$$ma = -mg\sin\theta + \mu_c mg\cos\theta$$

ou

$$a = g(\mu_c\cos\theta - \sin\theta) \tag{28}$$

Podemos fatorar o $\cos\theta$ e escrever

$$a = g\cos\theta(\mu_c - \tan\theta) \tag{29}$$

Como estamos supondo $\theta > \theta_e$, teremos

$$\tan\theta > \tan\theta_e = \mu_e \tag{30}$$

Portanto

$$a \leq g\cos\theta(\mu_c - \mu_e) \tag{31}$$

(o sinal da desigualdade se inverte pois em (29) temos $-\tan\theta$). Além disso $\mu_c < \mu_e$ e portanto $\mu_c - \mu_e < 0$.

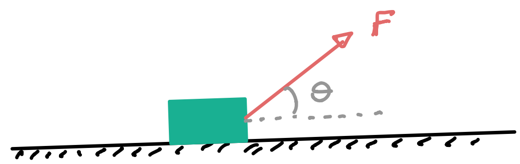
Assim

$$a \leq g\cos\theta(\mu_c - \mu_e) < 0 \tag{32}$$

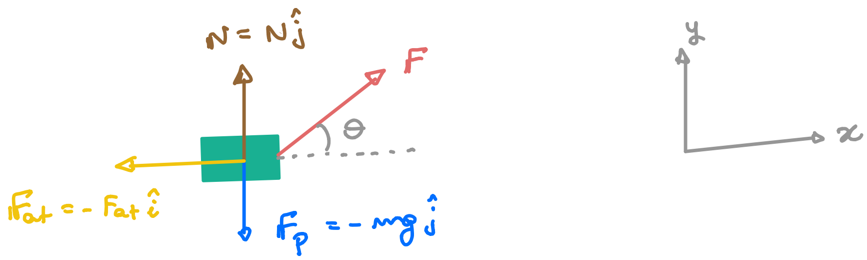
Ou seja, a aceleração é sempre negativa, na direção $-x$ (para baixo). Isso, claro, é apenas um teste de sanidade. Seria muito maluco se o atrito ativasse o bloco para cima.

Exemplo: empurrando um bloquinho

Considere um bloquinho sendo empurrado por uma pessoa, de tal forma que a força exercida faz um ângulo θ com a horizontal.



Além dessa força teremos também o peso, a normal e o atrito. O diagrama de forças para o bloco será, portanto



A força resultante em cada direção será, portanto,

$$x: \qquad F^x_{res} = F\cos\theta - F_{at} \tag{33}$$

$$y: \qquad F^y_{res} = N + F\sin\theta - mg \tag{34}$$

A força normal vai compensar as outras forças na direção y, de tal forma que a aceleração resultante será apenas em x. Fazendo $F^y_{res} = 0$ obtemos, portanto

$$N = mg - F\sin\theta \tag{35}$$

Essa força será positiva enquanto

$$F\sin\theta < mg \tag{36}$$

Se aplicarmos uma força maior que isso, a normal se anula e o bloco sai do chão. Vamos supor que isso <u>não</u> ocorre.

Agora precisamos saber se o bloco sai do lugar ou não. A força de atrito vai tentar compensar a força $F\cos\theta$ na direção x para impedir que o bloco se mova. Mas isso só ocorre até o valor máximo $f_{at}^{max} = \mu_e N$. Portanto, a condição em $F\cos\theta$ para que o bloco saia do lugar é

$$F\cos\theta > \mu_e N = \mu_e\,(mg - F\sin\theta)$$

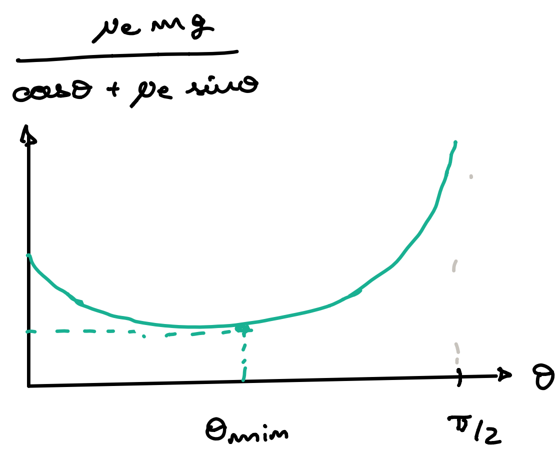
ou seja

$$F\,(\cos\theta + \mu_e \sin\theta) > \mu_e\, mg$$

e, portanto

$$F > \frac{\mu_e\, mg}{\cos\theta + \mu_e \sin\theta} \tag{37}$$

Se fizermos um gráfico do lado direito em função do ângulo θ, obteremos algo como



Esse gráfico significa que existe um valor ótimo para θ onde a força que precisamos fazer para tirar o bloco do lugar é mínima. Ou seja, tem uma inclinação particular onde é mais fácil tirar o bloco do lugar.

No curso de cálculo você vai ver uma forma sistemática para calcular o mínimo de uma função. Mas por agora, podemos usar um método mais simples. Vimos na Eq. (27) que o coeficiente de atrito estático podia ser escrito como

$$\mu_e = \tan\theta_e$$

onde θ_e é a inclinação do plano necessária para fazer o bloco escorregar.

Substituindo isso na Eq. (37) obtemos

$$F > \frac{mg \tan\theta_e}{\cos\theta + \tan\theta_e \sin\theta}$$

$$= \frac{mg \dfrac{\sin\theta_e}{\cos\theta_e}}{\cos\theta + \dfrac{\sin\theta_e}{\cos\theta_e}\sin\theta}$$

$$= \frac{mg \sin\theta_e}{\cos\theta_e \cos\theta + \sin\theta_e \sin\theta}$$

O andar de baixo pode agora ser escrito como

$$F > \frac{mg \sin\theta_e}{\cos(\theta - \theta_e)} \tag{38}$$

Queremos agora saber qual θ torna o lado direito o menor possível. Para isso o andar de baixo deve ser máximo, o que ocorre quando $\cos(\theta - \theta_e) = 1$. Portanto concluímos que

$$\theta_{min} = \theta_e \tag{39}$$

Ou seja, o melhor ângulo para empurrar o bloco e fazer com que ele saia do lugar é exatamente o ângulo θ_c do problema anterior.

— // —

Suponha agora que a (38) é satisfeita e o bloco começa a se movimentar. Nesse caso a força de atrito cinética será $F_{at} = \mu_c N$. A 2ª lei, junto com a Eq. (33) fornece, portanto,

$$m a_x = F_{res}^x = F\cos\theta - \mu_c N$$

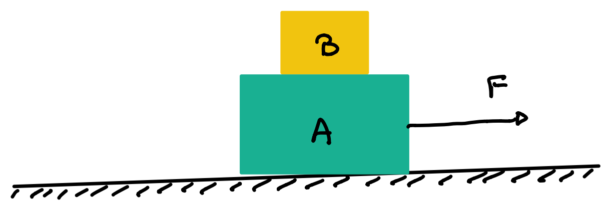
$$= F\cos\theta - \mu_c (mg - F\sin\theta)$$

$$\therefore \qquad a_x = \frac{F}{m}(\cos\theta + \mu_c \sin\theta) - \mu_c g \qquad (40)$$

O bloco se move, portanto, com aceleração uniforme.

Exemplo: um bloco em cima do outro

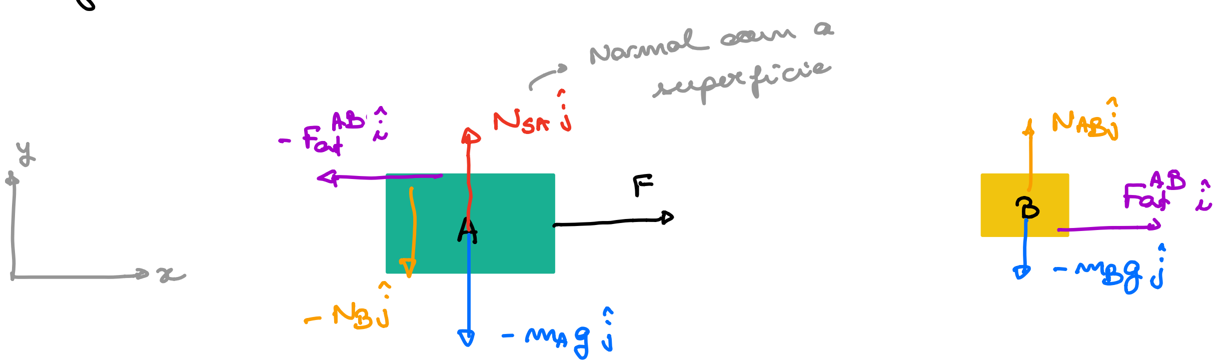
Considere agora a seguinte situação:



Pergunta: qual o valor máximo de F para que o bloco B não deslize sobre o bloco A?

Vamos supor, por simplicidade, que a superfície em que A se move tem atrito desprezível. Na lista você vai tratar o caso onde isso não é verdade. O único atrito, portanto, será na superfície entre A e B.

Para abordar esse problema, começamos desenhando o diagrama de forças em cada um dos corpos



Pelo princípio da ação e reação, A exerce uma normal em B para cima e B exerce a mesma normal em A, mas para baixo. Da mesma forma, como A se movimenta para a direita haverá uma força de atrito F_{at}^{AB} p/ a esquerda (contrária ao movimento). Pela 3ª lei, isso se traduz em uma força F_{at}^{AB} no bloco B, mas que agora é direcionada para a direita. É essa força que empurra B e faz com que ele se mova junto com A.

A 2ª lei para os dois blocos será, portanto, (em forma vetorial)

$$m_A a_A = (F - F_{at}^{AB})\hat{i} + (N_{SA} - N_{AB} - m_A g)\hat{j} \tag{41}$$

$$m_B a_B = F_{at}^{AB}\hat{i} + (N_{AB} - m_B g)\hat{j} \tag{42}$$

Olhamos primeiro para a direção y. As acelerações a_{Ax} e a_{Ay} devem se cancelar, portanto

$$N_{AB} = m_B g \tag{43}$$

$$\begin{aligned} N_{SA} &= N_{AB} + m_A g \\ &= (m_A + m_B) g \end{aligned} \tag{44}$$

Isso faz sentido: a normal entre A e B só depende do peso de B. Já a Normal com a superfície sente A e B como se fossem uma massa só, de valor $m_A + m_B$.

Em seguida olhamos para a componente x de (41) e (42).

Teremos:

$$m_A a_{Ax} = F - F_{at}^{AB} \tag{45}$$

$$m_B a_{Bx} = F_{at}^{AB} \tag{46}$$

Voltemos agora à pergunta original: queremos saber qual o maior valor possível de F para que B não deslize sobre A. Isso significa, matematicamente, que

$$a_{Ax} = a_{Bx} = a_x \tag{47}$$

Ou seja, que ambos os blocos se movem com a mesma aceleração. Portanto, (45) e (46) se tornam

$$m_A a_x = F - F_{at}^{AB} \tag{48}$$

$$m_B a_x = F_{at}^{AB} \tag{49}$$

Ou seja

$$m_A a_x = F - m_B a_x$$

o que implica em

$$a_x = \frac{F}{m_A + m_B} \tag{50}$$

Isso faz sentido: como não há atrito entre A e a superfície, se os dois blocos andam juntos a aceleração será simplesmente a Força F dividida pela massa total $m_A + m_B$

Por outro lado, substituindo isso na (49) obtemos

$$F_{at}^{AB} = m_B a_x = \frac{m_B F}{m_A + m_B} \tag{51}$$

Isso fornece a força que o atrito estático entre AB tem que compensar para que o bloco B não deslize. Mas o atrito é capaz de compensar, no máximo $\mu_e N_{AB}$. Portanto, obtemos a condição $F_{at}^{AB} < \mu_e N_{AB}$, ou seja

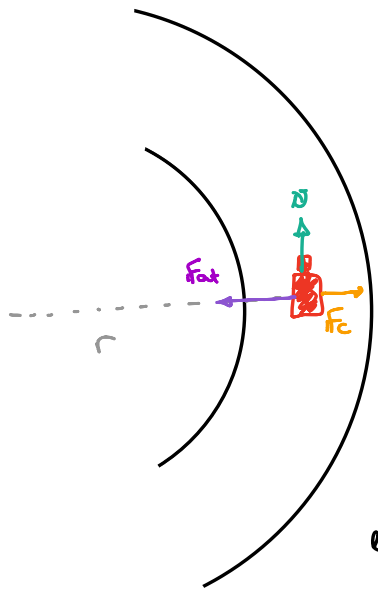
$$\frac{m_B F}{m_A + m_B} < \mu_e N_{AB} = \mu_e m_B g$$

$$\therefore \qquad F < \mu_e (m_A + m_B) g \tag{52}$$

Se a força for maior que esse valor, o bloco B vai deslizar sobre o bloco A.

Exemplo: aula de física no autoesporte

Considere um carro fazendo uma curva



Se a curva possui raio r, haverá uma força centrípeta

$$\mathbf{F}_c = \frac{mv^2}{r}\hat{r}$$

Para que o carro consiga se manter na curva, o atrito lateral dos pneus deverá compensar F_c. Esse atrito é estático pois estamos falando do atrito lateral.

Portanto, a condição para que o carro não derrape é

$$\frac{mv^2}{r} < \mu_e N = \mu_e mg$$

ou seja

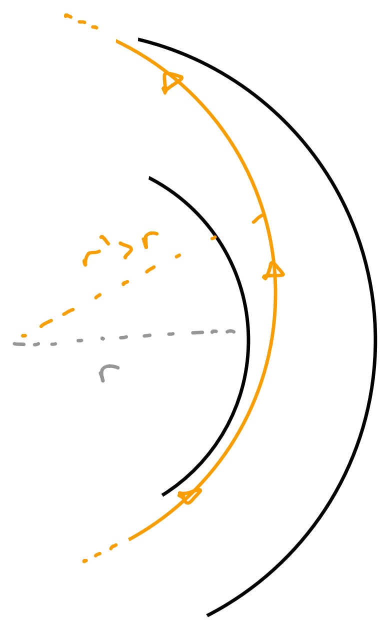
$$v^2 < v_{max}^2 = \mu_e r g. \qquad (53)$$

Se v passar desse valor, o carro derrapa.

É curioso como esse valor não depende da massa do carro. Isso é uma consequência da forma aproximada da força de atrito que estamos usando. Na realidade vai depender sim da massa.

Note como a Eq (53) depende do raio da curva. Quanto maior for r, maior será a velocidade máxima permitida.

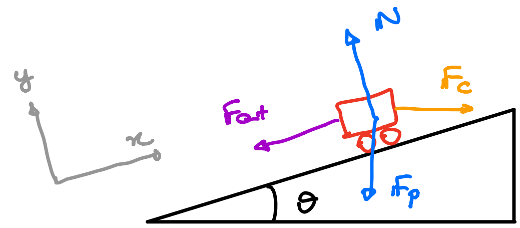
Em corridas de automóvel, é muito comum burlar isso fazendo a curva o mais aberto possível:



você entra mais fechado e vai abrindo, de tal forma que no final o raio efetivo que você percorreu é maior. Isso permite fazer a curva com uma velocidade maior.

Uma outra forma de aumentar v_{max} é através da aerodinâmica. Estamos desprezando completamente o atrito com o ar aqui. Na prática, no entanto, um bom design aerodinâmico pode pressionar o carro para baixo, aumentando a normal. Consequentemente, isso aumenta também a força de atrito máxima, já que $F_{at}^{max} = \mu_e N$.

Outra maneira de permitir velocidades maiores é colocar uma inclinação na estrada:



A força resultante será

$$F_{res} = N\hat{j} - mg\left(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) - F_{at}\,\hat{i}$$
$$+ \frac{mv^2}{r}\left(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right)$$
$$= \left[-F_{at} - mg\sin\theta + \frac{mv^2}{r}\cos\theta\right]\hat{i}$$
$$+ \left[N - mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}\sin\theta\right]\hat{j} \tag{54}$$

Queremos que ambas as componentes zerem: a componente x para o carro não derrapar e a componente y para ele não começar a levitar. Portanto, obtemos

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}\sin\theta \tag{55}$$

$$F_{at} = -mg\sin\theta + \frac{mv^2}{r}\cos\theta \tag{56}$$

Para que não haja deslizamento, devemos ter $F_{at} < \mu_e N$. Ou seja

$$-mg\sin\theta + \frac{mv^2}{r}\cos\theta < \mu_e\left(mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}\sin\theta\right)$$

Ou

$$\frac{v^2}{r}(\cos\theta - \mu_e\sin\theta) < g(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)$$

$$\therefore \quad v^2 < v_{max}^2 = rg\left(\frac{\sin\theta + \mu_e\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\sin\theta}\right) \tag{57}$$

colocar uma inclinação permite que o carro não derrape mesmo quando o atrito é zero. De fato, colocando $\mu_e = 0$ obtemos

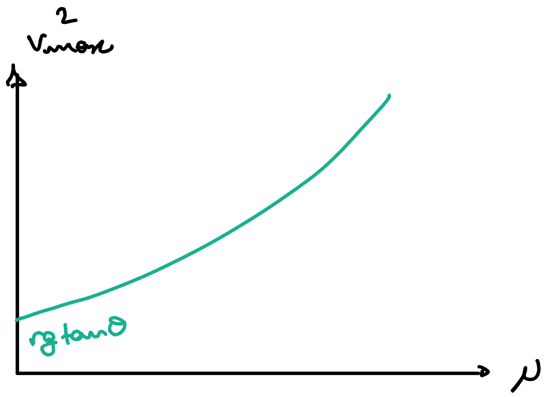
$$v_{max}^2 = rg\tan\theta \tag{58}$$

Isso fornece a velocidade máxima em função da inclinação. Se $\theta = 0$ obtemos a desigualdade trivial, $v^2 < 0$. Ou seja, se $\theta = 0$ e não há atrito, o carro sempre derrapa. Outro teste de sanidade é colocar $\theta = 0$ na (57), o que leva a

$$v_{max}^2 = rg\mu_e$$

que é a Eq (53).

Para valores intermediários, obtemos algo como



É interessante estudar também o que acontece quando o atrito é muito muito grande. Colocando $\mu_e >> 1$ na Eq (57) podemos aproximar

$$v_{max}^2 = rg\left(\frac{\sin\theta + \mu_e\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\sin\theta}\right) \approx rg\left(\frac{\mu_e\cos\theta}{-\mu_e\sin\theta}\right)$$

$$= -rg\cot\theta$$

que é negativo, o que não faz o menor sentido. Na verdade isso ocorre pois a equação $F_{at} = \mu_e N$ (que representa o limite do atrito estático) não terá solução. "Não ter solução" significa que, qualquer que seja a velocidade, a F_{at} nunca vai atingir o seu máximo; o carro nunca vai derrapar.

Da Eq (57) vemos que isso ocorre também para μ_e finito, contanto que

$$\cos\theta - \mu_e \sin\theta < 0$$

ou seja, quando

$$\mu_e > \cot\theta. \tag{59}$$

Para uma dada inclinação θ, se $\mu_e > \cot\theta$ o carro nunca derrapa, qualquer que seja sua velocidade. Ele pode estar se movendo na velocidade da luz que nunca vai derrapar. Claro, isso não faz o menor sentido. O motivo para isso, está novamente no caráter aproximado da fórmula do atrito que estamos usando.

Felizmente, na prática isso não é um problema. Por exemplo, se $\theta = 5^\circ$, $\cot\theta \simeq 11.43$. Precisaríamos, portanto de $\mu_e > 11.43$. Isso é surreal. Em geral $\mu_e \sim 0.01$ a 1.