1) Distribuição de Poisson

(a) $\langle a^X \rangle = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\lambda)^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} e^{a\lambda}$

$\therefore \quad \boxed{\langle a^X \rangle = e^{\lambda(a-1)}}$

(b) $\langle X \rangle = \lambda \Rightarrow \langle Y \rangle = \langle X \rangle + c = \lambda + c$

$Var(X) = \lambda \Rightarrow Var(Y) = Var(X) = \lambda$

2) Quantização do momento angular

Podemos parametrizar

$P(S_z = \hbar) = P_+$

$P(S_z = -\hbar) = P_-$

$P(S_z = 0) = 1 - P_+ - P_-$ (normalização)

Portanto:

$\frac{\hbar}{3} = \langle S_z \rangle = (+\hbar) P(S_z = \hbar) + (0) P(S_z = 0) + (-\hbar) P(S_z = -\hbar)$

$= \hbar (P_+ - P_-)$

Isso fornece a Eq:

$P_+ - P_- = \frac{1}{3}$

Temos também

$$\frac{2\hbar^2}{3} = \langle S_z^2 \rangle = (+\hbar)^2 P_+ + (-\hbar)^2 P_- = \hbar^2 (P_+ + P_-)$$

Portanto obtemos outra Eq:

$$P_+ + P_- = \frac{2}{3}$$

Assim, precisamos resolver

$$P_+ - P_- = \frac{1}{3}$$

$$P_+ + P_- = \frac{2}{3}$$

O resultado é

$$P_+ = 1/2 \qquad P_- = 1/6$$

Portanto a dist. de S_z será

$$P(S_z = +\hbar) = 1/2$$

$$P(S_z = -\hbar) = 1/6$$

$$P(S_z = 0) = 1/3.$$

3) Paradigma de Poisson

(a) O número médio de visitas é

$$\lambda = \langle X \rangle = np = (200 \times 10^{6}) \times (10^{-9}) = 0.2$$

$$\text{Prob (pelo menos duas)} = P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

onde

$$P(X=k) = e^{-0.2} \frac{(0.2)^k}{k!}$$

$\therefore$ Prob (pelo menos duas visitas) = 0.0175231.

(b) Seja X = número de erros na 1ª página. Então

$\langle X \rangle = \lambda = 1$ pois há 100 erros em 100 páginas.

$$P(\text{nenhum erro na 1ª página}) = P(X=0) = e^{-(1)} = 0.367879$$

(c) Seja X = número de pixels defeituosos.

$$\langle X \rangle = 1920 \times 1080 \times 5 \times 10^{-6} = 10.368 := \lambda$$

Pelo paradigma de Poisson, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Para passar no controle de qualidade é necessário que $X \leq 14$. Usando uma calculadora obtemos

$$P(X \leq 14) = \sum_{k=0}^{14} P(X=k) = 0.895961.$$

4) Distribuição geométrica

(a) $$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k}_{\text{série geométrica}} = p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

(b) $$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = p \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^k$$

Seja $q = 1 - p$. Partimos de

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Derivando os dois lados com relação a q:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Multiplicando ambos os lados por q:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Portanto

$$\langle x \rangle = p \frac{q}{(1-q)^2} = p \frac{(1-p)}{p^2}$$

ou

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{1-p}{p}}$$

Se $p = 1$ (nunca fracassa) então $\langle x \rangle = 0$.

(c) Se X = número de reprovações, então $X \sim \text{Geom}(0.3)$

$$\Rightarrow \langle X \rangle = \frac{1-0.3}{0.3} = 2.33.$$

(d) A média não precisa ser um número inteiro. Se, ao jogar uma moeda, definimos $X=0$ = cara e $X=1$ = coroa, então $\langle X \rangle = 0.5$.

É importante não confundir o valor médio com o valor mais provável. Para $X \sim \text{Geom}(0.3)$ temos

$X=k$	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0.3	0.21	0.147	0.1029	0.072	0.050

Portanto, vemos que apesar do fato de que o aluno irá reprovar em média, 2.33 vezes, a situação mais provável é que ele não reprove nenhuma vez. ($P(X=0) = 0.3$).

Note, por outro lado, que a prob. dele reprovar pelo menos uma vez, será

$$P(X>0) = 1 - P(X=0) = 0.7$$

ou seja, ele tem 70% de chance de reprovar pelo menos uma vez, o que é óbvio já que a probabilidade dele passar é $p=0.3$.

5) Radiação de corpo negro

(a) $p_n = \dfrac{e^{-\alpha n}}{Z}$, $\alpha = \dfrac{\hbar\omega}{k_B T}$

Normalização:

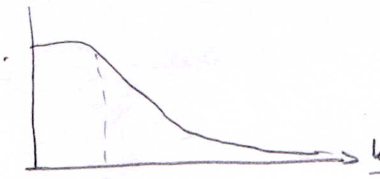
$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{1}{Z}\,\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

A soma converge pois $\alpha > 0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1$.

$$\therefore \quad Z = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

e $$\boxed{p_n = (1-e^{-\alpha})\, e^{-\alpha n}}$$

(b) $P_0 = 1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}$



(c) Geom(p): $P_k = (1-p)^k p$ e $\langle X\rangle = \dfrac{1-p}{p}$

$$\therefore \quad 1-p = e^{-\alpha}$$

$$\langle n\rangle = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{\alpha}-1} \quad , \quad \alpha = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$