Mecânica Estatística - Lista 6

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 23/06/2017

1) (2,5 pontos) Modelo de Curie-Weiss

As energias do modelo de Ising em uma rede arbitrária são dadas por

$$E = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i$$

onde a soma se estende sobre os primeiros vizinhos. Uma outra maneira de realizar a aproximação de campo médio é modificar essa interação para que todos os spins interajam de maneira equivalente com todos os outros spins da rede. Ou seja, escrevemos

$$E = -\frac{J}{2N}\left(\sum_i \sigma_i\right)^2 - h\sum_i \sigma_i$$

onde o fator de N foi colocado para garantir que a energia continue sendo extensiva.

(a) Considere a seguinte identidade Gaussiana:

$$e^{y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2yx}\,\mathrm{d}x$$

Ela converte uma função quadrática em y em uma função linear, ao custo de uma integral Gaussiana. Usando essa identidade mostre que a função de partição pode ser escrita como

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-x^2}\left[2\cosh\left(\beta h + 2x\sqrt{\frac{\beta J}{2N}}\right)\right]^N$$

(b) Agora faça uma mudança de variáveis para $2x\sqrt{\frac{\beta J}{2N}} = \beta J m$. Mostre que podemos escrever Z como

$$Z = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-N\beta f(m)}$$

onde $f(m) = \frac{Jm^2}{2} - \frac{1}{\beta}\ln[2\cosh(\beta J m + \beta H)]$ e A é uma constante. Calcule A.

(c) Essa função de partição ainda depende de m. Para obter a função de partição real do sistema devemos usar o método assintótico de Laplace. Ou seja, precisamos minimizar f. Mostre que o valor de m que minimiza f é exatamente aquele que satisfaz a equação de Curie-Weiss, $m = \tanh(\beta h + \beta J m)$.

2) (2,5 pontos) Anti-ferromagnetismo

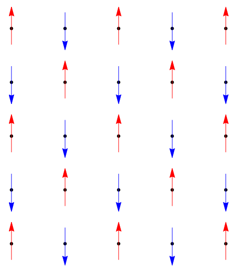
Considere o modelo de Ising com interações anti-ferromagnéticas,

$$E = J\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i$$

onde $J > 0$. Suponha que sistema possui um total de N spins dispostos em uma rede hipercúbica de dimensão d. A interação anti-ferromagnética favorece o alinhamento anti-paralelo dos spins. Portanto, o estado fundamental consiste em duas *sub-redes*, A e B, uma com os spins para cima e outra com os spins para baixo (vide figura abaixo).

(a) Realize a aproximação de campo médio, escrevendo $\sigma_i = m + \delta\sigma_i$. No entanto, use valores diferentes m_a e m_b para os spins de cada sub-rede. Note que, na energia de interação, um spin da sub-rede A interage apenas com spins da sub-rede B. Mostre que a energia pode ser escrita como

$$E \simeq -JNdm_am_b + 2Jdm_a\sum_{i\in B}\sigma_i + 2Jdm_b\sum_{i\in A}\sigma_i - h\sum_i\sigma_i \tag{1}$$



(b) Mostre que a magnetização em cada sub-rede deve satisfazer

$$m_a = \tanh(-\beta J d m_b + \beta h)$$

$$m_b = \tanh(-\beta J d m_a + \beta h)$$

(c) Resolva essas equações para o caso $h = 0$, próximo do ponto crítico, assumindo que $m_b = -m_a$. Obtenha a temperatura crítica do modelo. No caso do antiferromagnetismo ela é conhecida como **temperatura de Néel**, T_N.

(d) Considere agora a resposta do sistema a um campo magnético para $T > T_N$. Se $M = m_a + m_b$, mostre que a susceptibilidade pode ser escrita como

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{C}{T + T_N}$$

onde C é uma constante. Calcule C. Esse resultado fornece uma maneira útil de saber, a partir de uma análise em altas temperaturas, se um material é ferromagnético ou anti-ferromagnético. No caso FM $\chi^{-1} \propto T - T_c$ e portanto uma curva de χ^{-1} vs. T deverá ser uma reta que intercepta o eixo horizontal num valor positivo. Para o caso AFM a curva também será uma reta, mas deverá interceptar o eixo num valor negativo pois $\chi^{-1} \propto T + T_N$.

3) (2,5 pontos) Entropia de um gás ideal quântico

(a) Mostre que a entropia de um gás ideal quântico pode ser escrita como

$$S = -k_B \sum_j \left\{ \bar{n}_j \ln \bar{n}_j \pm (1 \mp \bar{n}_j) \ln(1 \mp \bar{n}_j) \right\}$$

onde o sinal superior (inferior) se refere a férmions (bósons) e $\bar{n}_j = (e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} \pm 1)^{-1}$ é a distribuição de Fermi-Dirac (Bose-Einstein).

(b) Mostre que, tanto para Férmions quanto para Bósons, vale que $\mathrm{Var}(n_j) := \langle n_j^2 \rangle - \langle n_j \rangle^2 = k_B T \frac{\partial \bar{n}_j}{\partial \mu}$.

4) (2,5 pontos) Gás de Fermi ultra-relativístico

Considere um gás de Fermi em 3 dimensões com N partículas e relação de dispersão $\epsilon_k = c|\boldsymbol{p}|$ onde $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ é o momento linear.

(a) Calcule a densidade de estados do sistema (relacionada com a transformação de uma soma sobre $\boldsymbol{k}$ em uma integral em ϵ).

(b) Calcule a energia de Fermi ϵ_F.

(c) Calcule a energia do estado fundamental. Simplifique sua resposta para que ela fique apenas em termos de ϵ_F e N.